

# Zur Lösung der Nicht-linearen Vlasov-Gleichung

Von G. KNORR

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München  
(Z. Naturforsch. 18 a, 1304—1315 [1963]; eingegangen am 20. September 1963)

Wave-like equations of the non linear VLASOV equation for a one dimensional electron plasma are discussed analytically and numerically. The quasilinear theory is derived in a simple way and some conclusions are drawn from it. It is found that, if the initial conditions of the harmonics of the electrical field differ by orders of magnitude the type of the solution varies appreciably. — The numerical solution is obtained by integrating the characteristic function of the distribution function  $f$ , i. e. it's FOURIER transform in space and velocity. It is shown that this method is in principle superior to the direct integration of  $f$ . Stable and instable cases are discussed. Good agreement between theory and numerical computations is found.

In einer früheren Arbeit<sup>1</sup>, die wir im folgenden mit I bezeichnen, war über die numerische Integration der nichtlinearen VLASOV-Gleichung berichtet worden, die nach der Methode der Charakteristiken ausgeführt worden war. Es sind damals einige nichtlineare Effekte festgestellt worden, jedoch waren die Rechnungen noch zu wenig genau, so daß das Bedürfnis nach besseren, verfeinerten Rechnungen bestand. Wie in I schon vorgeschlagen, wurden die Rechnungen mit der Charakteristikenmethode nach einem wesentlich verfeinerten Verfahren auf einer Rechenanlage des Typs IBM 7090 fortgeführt. Es stellte sich heraus, daß auf diese Weise die Genauigkeit nicht wesentlich erhöht werden konnte, wenn man nicht abnorm lange Rechenzeiten in Kauf nehmen wollte. Der Grund hierfür ist folgender: Die VLASOV-Gleichung läßt sich schreiben als

$$D f/D t = 0,$$

wobei  $f(r, v, t)$  die Verteilungsfunktion in Abhängigkeit von Ort, Geschwindigkeit und Zeit, und  $D/D t$  die Ableitung längs der Charakteristiken bedeutet. Ein einmal gegebener Wertevorrat von  $f$  bleibt also für alle Zeiten erhalten. Kommen sich im Laufe der Zeit zwei ursprünglich entfernte Charakteristiken, die sehr verschiedene  $f$ -Werte repräsentieren, nahe, so bedeutet dies, daß die Ableitungen in  $r$  und  $v$  sehr groß werden. Die Verteilungsfunktion wird dann nur noch schlecht numerisch berechnet, wenn die charakteristische Länge einer solchen Schwankung von  $f$  vergleichbar wird mit einem Netzpunkt-abstand des numerischen Netzes und dies ist erfahrungsgemäß schon nach wenigen Schwingungen der

Fall. Diese Bemerkung gilt für alle numerischen Methoden, die sich mit der direkten Berechnung von  $f$  befassen, nicht nur die der Charakteristiken. Es wurde deshalb ein Verfahren entwickelt, welches diese prinzipielle Schwierigkeit umgeht.

Die numerischen Ergebnisse werden mit den Ergebnissen der Theorie, insbesondere der quasilinearen von VEDENOV, WELIDOV und SAGDEJEV<sup>2</sup> bzw. DRUMMOND und PINES<sup>3</sup> verglichen. Da aber die Ableitung der ersten Autoren mehr intuitiv, die der letzteren ziemlich kompliziert ist, soll die quasilineare Theorie hier auf eine einfache Weise abgeleitet werden.

## Analytische Lösungen

### Die quasilineare Theorie

Wir gehen aus von denselben vereinfachenden Annahmen wie in I: Eindimensionales Elektronenplasma, verschmierter Ionenhintergrund, Periodizität in  $x$ . Als Einheiten in  $x, v, t$  verwenden wir (vgl. I) die DEBYE-Länge

$$\lambda_D = \sqrt{\kappa T / 4 \pi e^2 n},$$

die thermische Geschwindigkeit  $v_{th} = \sqrt{k T / m}$  und die reziproke Plasmafrequenz  $\omega_p^{-1} = \sqrt{m / 4 \pi e^2 n}$ . Dann gilt für die normierte Verteilungsfunktion  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E(x, t) \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f dv - 1; \quad \frac{\partial E}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{+\infty} v f dv. \quad (2)$$

<sup>1</sup> G. KNORR, Z. Naturforsch. 16 a, 1320 [1961].  
<sup>2</sup> A. VEDENOV, E. WELIDOV u. P. SAGDEJEV, Conf. on Plasma Physics and Controlled Fusion Research CN-10/199 (1961).

<sup>3</sup> W. E. DRUMMOND u. D. PINES, Conf. on Plasma Physics and Controlled Fusion Research CN-10/134 (1961).



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Durch eine FOURIER-Transformation in  $x$

$$f_K(v, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x, v, t) e^{-iKx} dx;$$

$$K = n K_0; \quad K_0 = \frac{2\pi}{L}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$E_K(t) = \frac{1}{L} \int_0^L E(x, t) e^{-iKx} dx$$

erhalten wir aus (1) und (2)

$$\frac{\partial f_K}{\partial t} + iKv f_K + \sum_{q=-\infty}^{+\infty} E_q \frac{\partial f_{K-q}(v, t)}{\partial v} = 0, \quad (3)$$

$$iK E_K = \int_{-\infty}^{+\infty} f_K dv; \quad \frac{\partial E_K}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{+\infty} v f_K dv. \quad (4)$$

Durch die Randbedingung, daß sich im Unendlichen keine Ladungen aufhäufen dürfen, d. h. Forderung eines periodischen Potentials, wird die durch (4,1) unbestimmt gelassene Komponente  $E_0$  festgelegt:

$$E_0 = 0. \quad (5)$$

Exakte Lösungen von (3), (4), wie

$$f(v, t) = g(v - \alpha \sin t),$$

wobei  $g$  nur den beiden Bedingungen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(w) dw = 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w g(w) dw = 0$$

genügen muß, werden im folgenden nicht betrachtet.

Wir führen durch den Parameter  $\varepsilon$  eine Charakterisierung der Größenordnung ein und setzen

$$f_0 = O(\varepsilon^0); \quad f_K = O(\varepsilon); \quad E_K = O(\varepsilon). \quad (6)$$

Wegen der Bedeutung des Energiesatzes liegt es nahe, die Größen zweiter Ordnung in der Gleichung für  $f_0$  mit zu berücksichtigen, hingegen diese Glieder in den Gleichungen für  $f_K$ ,  $K \neq 0$  zunächst wegzulassen. Man erhält dann das System

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} &= - \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ E_{-q} \frac{\partial f_q}{\partial v} + \text{c. c.} \right] \\ \frac{\partial f_K}{\partial t} + iKv f_K &= -E_K(t) \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v}. \end{aligned} \quad (7)$$

Eine formale Lösung von (7,2) ist

$$f_K = - \int_0^t e^{-iKv(t-\tau)} E_K(\tau) \frac{\partial f_0(v, \tau)}{\partial v} d\tau. \quad (8)$$

Die Lösung  $g_K(v) e^{-iKv t}$  des homogenen Teils von (7,2) wurde hier weggelassen. Man kann nämlich zeigen, und in der Dissertation des Verfassers<sup>4</sup> ist dies in aller Ausführlichkeit durchgerechnet, daß für  $K_0 v_{\text{th}} t \gg 1$  dieser Term keinen Beitrag zu den makroskopischen Größen, wie elektrisches Feld, Strom etc., gibt, da er stets nur in Integralen der Art

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(v) g_K(v) e^{iKv t} dv$$

erscheint. Im limes  $K t \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral, wenn nur  $h(v)$  und  $g_K(v)$  hinreichend glatt sind. Dies ist aber immer gewährleistet, da  $h(v)$  die makroskopische Größe und  $g_K(v)$  die Anfangsbedingung von  $f_K$  charakterisiert, die wir immer als glatt voraussetzen wollen.

Im linearen Fall erhält man als asymptotische Lösung für das elektrische Feld die Gestalt

$$E_K(t) \sim e^{-i\omega_K t}.$$

Es liegt deshalb nahe, zur Lösung von (7) einen WKB-Ansatz

$$E_K(t) = E_K^0 \exp \left\{ -i \int_0^t \omega(t') dt' \right\} \quad (9)$$

zu versuchen. Wir bezeichnen mit  $G(s, \tau)$  die FOURIER-Transformierte von  $\partial f_0 / \partial v$  bezüglich  $v$

$$G(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_0(v, \tau)}{\partial v} e^{-isv} dv, \quad (10)$$

welche noch von einem Parameter  $\tau$  abhängt.

Setzen wir nun (8) und (9) in (4,1) ein, so erhalten wir nach einer Transformation der Variablen:

$$iK = - \int_0^t \exp \left\{ +i \int_0^s \omega(t-t') dt' \right\} \cdot G(Ks, t-s) ds. \quad (11)$$

Es bezeichne  $b$  die Ausdehnung von  $G$  bezüglich der ersten Variablen so, daß die Beiträge zum Integral für  $Ks > b$  vernachlässigbar werden. Sei ferner

$$|\text{Im}(\omega)| \ll 1 \quad \text{und} \quad |\dot{\omega} b^2 / K^2| \ll 1$$

und außerdem  $G$  bezüglich der zweiten Variablen langsam veränderlich in dem Intervall  $0 \leq s \leq b/K$ , dann kann man (11) näherungsweise schreiben:

$$iK = - \int_0^t e^{i\omega(t)s} G(Ks, t) ds,$$

<sup>4</sup> G. KNORR, Beiträge zur Lösung der Nichtlinearen VLASOV-Gleichung, Dissertation an der Universität München 1963.

hieraus folgt aber für  $t \rightarrow \infty$

$$K^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_0(v, t)/\partial v}{v - \omega(t)/K} dv; \quad (12)$$

dies ist gerade die aus der linearen Theorie bekannte Dispersionsrelation mit dem Unterschied, daß  $f_0$  langsam zeitabhängig ist. Damit wird auch  $\omega$  als Funktional von  $f_0$  zeitabhängig.

Setzt man (8), (9) in (7,1) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D(v, t) \frac{\partial}{\partial v} f_0(v, t), \quad (13)$$

$$D(v, t) = 2 \pi \sum_{K=K_0}^{\infty} |E_K(t)|^2 [\delta_+(Kv - \omega_K) + \text{c. c.}] . \quad (14)$$

Ferner gilt

$$\frac{d \ln |E_K(t)|^2}{dt} = 2 \gamma_K(t). \quad (15)$$

Die Gln. (12) bis (14) bilden ein konsistentes System zur Berechnung von  $f_0$  und der  $E_K$ .

Man zeigt leicht, daß der Energiesatz gilt: Die Änderung der kinetischen Energie  $K$  ist

$$\dot{K} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} v^2 f_0 dv;$$

durch partielle Integration, Benutzung von (13), (14), (15) und (12) erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= - \sum_{K=K_0}^{\infty} |E_K^0|^2 \exp \left\{ 2 \int_0^t \gamma(t') dt' \right\} \\ &\quad \cdot \left[ \frac{\omega_K}{K} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv + \text{c. c.} \right] \\ &= 2 \sum_{K=K_0}^{\infty} \gamma_K |E_K(t)|^2 = - \dot{W}, \end{aligned}$$

wobei  $W$  die Feldenergie ist.

Manche Autoren setzen in (14) eine  $\delta$ -Funktion statt der  $\delta_+$ -Funktion (vgl. 2 und 3). Damit erhält man ein um einen Faktor 2 falsches Resultat.

### Einfluß der Anfangsbedingungen

Die Wahl (6) der Größenordnungen der Anfangsbedingungen ist ziemlich willkürlich und kann sich beachtlich auf den Typ der asymptotischen Lösung der VLASOV-Gleichung auswirken. Wir wählen jetzt eine von (6) größenordnungsmäßig abweichende Anfangsbedingung, wie sie in den numerischen Rechnungen stets verwendet wurde:

$$f_0 = O(\varepsilon^0); \quad f_n = O(\varepsilon^n); \quad E_n = O(\varepsilon^n). \quad (16)$$

In erster Näherung erhält man das gegenüber (3) auch schon wesentlich vereinfachte System:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} + i K_0 v n f_n + \sum_{\nu=-n}^n E_\nu(t) \frac{\partial f_{n-\nu}}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} + \sum_{\nu=-1}^{+1} E_\nu \frac{\partial f_{-\nu}}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Wir erhalten größenordnungsmäßig

$$\dot{f}_n \sim f_n; \quad n \geq 1; \quad \dot{f}_0 \sim \varepsilon^n f_0$$

und dürfen deshalb erwarten, daß die Größenordnungsverhältnisse von (16) für eine gewisse Zeitspanne erhalten bleiben.

Für  $n=1$  erhält man aus (17) und (4) gerade die Lösung der quasilinearen Theorie. Während diese Lösung aber bei Gültigkeit von (6) sich für jedes  $n$  ergab, ist sie hier nur für  $n=1$  gültig. Für  $n \geq 2$  (vgl. 4) kann man zeigen, daß für die asymptotische Lösung gilt:

$$\omega_n = n \omega_1. \quad (18)$$

Voraussetzung ist, daß im instabilen Fall  $\text{Im}(\omega) > 0$ ,  $f_0(v, 0)$  holomorph auf der reellen Achse, im stabilen Fall  $\text{Im}(\omega) < 0$ ,  $f_0(v_0, 0)$  holomorph in einem Streifen unterhalb der reellen Achse ist, der  $\omega_0/K_0$  noch enthält.

Gl. (18) unterscheidet sich wesentlich von dem Ergebnis der quasilinearen Theorie, gemäß der sich jedes  $\omega_n$  unabhängig voneinander aus (12) bestimmt. (18) gilt, als Ergebnis einer ersten Näherung, natürlich nur näherungsweise. Bezeichnen wir die Phase der  $n$ -ten Harmonischen mit  $\varphi_n(t)$

$$\varphi_n(t) = \int_0^t \omega_n(t') dt'$$

und führen in (17) eine zweite Näherung durch, so treten z. B. in  $E_1$  außer Gliedern  $\exp[i\varphi_1(t)]$  auch Glieder  $\exp\{i[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]\}$  auf. Da

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1(t) + B \cos [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \\ = C(t) \cos [\frac{1}{2} \varphi_2(t) + \varphi_0(t)] \end{aligned}$$

$$\text{mit } C(t) = \sqrt{1 + B^2 + 2B \cos 2\varphi_0(t)}$$

$$\text{und } \tan \varphi_0(t) = \frac{1-B}{1+B} \tan \left[ \varphi_1(t) - \frac{\varphi_2(t)}{2} \right],$$

erhalten wir eine Schwebungsscheinung. Denn es gilt (18) angenähert und deshalb sind  $C(t)$  und  $\varphi_0(t)$  langsam veränderliche Größen. Zwischen zwei Maxima der Amplitude von  $E_1$  ist der Phasenunterschied

$$2 \Delta \varphi_0(t) = 2 \Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2 = 2\pi. \quad (19)$$

In der zweiten Näherung für  $E_2$  tritt eine Schwebung auf, die annähernd die doppelte Frequenz der Schwebung der Grundwelle hat.

### Abschätzung der Feldenergie

Als Anwendung der Gln. (13) bis (15) schätzen wir für eine Zweistrominstabilität die für  $t \rightarrow \infty$  maximal in einer elektrischen Welle enthaltene Energie ab. Wir nehmen hierzu periodische Randbedingungen, genau so wie in den numerischen Rechnun-

gen, an. Dabei ist zu beachten, daß das Ergebnis selbstverständlich GALILEI-invariant sein muß. Wir benutzen deshalb für  $\gamma = \text{Im}(\omega)$  den von JACKSON<sup>5</sup> angegebenen Ausdruck:

$$\gamma = \frac{\pi}{2K} \left[ v \frac{\partial f_0}{\partial v} \right]_{v=\Omega/K} \left( 1 - \frac{K}{\Omega} \frac{d\Omega}{dK} \right); \quad \Omega = \text{Re}(\omega), \quad (20)$$

ferner sei  $\gamma \ll 1$ . – Für die Diffusionskonstante  $D$  erhalten wir aus (14), da  $\gamma > 0$

$$D = \frac{2}{K} |E_K(t)|^2 \frac{\gamma}{K} \left[ \left( v - \frac{\Omega}{K} \right)^2 + \left( \frac{\gamma}{K} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (21)$$

Integrieren wir Gl. (13) über  $v$  und  $t$  und setzen (21) ein, so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^v dv [f_0(v, t) - f_0(v, 0)] = \int_0^t dt D(v, t) \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v} = \frac{2}{K} \int_0^t dt |E_K(t)|^2 \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v} \frac{\gamma/K}{(v - \Omega/K)^2 + (\gamma/K)^2}. \quad (22)$$

Integration von Gl. (15) ergibt mit Hilfe von (20)

$$|E_K(t)|^2 = \frac{\pi}{K^2} \int_0^t dt |E_K(t)|^2 \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v} \Big|_{v=\Omega/K} \left( \Omega_K - K \frac{d\Omega_K}{dK} \right). \quad (23)$$

Wir dürfen voraussetzen, und  $t$  sei auf diesen Bereich beschränkt, daß keiner der Faktoren in den Integranden von (22) und (23) das Vorzeichen wechselt. Dann dürfen wir nach dem Mittelwertsatz in (22) den Faktor  $\gamma/K[(v - \Omega/K)^2 + (\gamma/K)^2]^{-1}$  und in (23) den Faktor  $[\Omega_K - K(d\Omega_K/dK)]$  vor das Integral ziehen. Nunmehr sind die Integranden in (22) und (23) gleich, wenn wir in (22)  $v = \Omega/K$  setzen. Wir erhalten

$$|E_K(t)|^2 = \frac{\pi}{2K^2} \left( \Omega - K \frac{d\Omega}{dK} \right) \gamma \int_{-\infty}^{\Omega/K} dv [f_0(v, t) - f_0(v, 0)]. \quad (24)$$

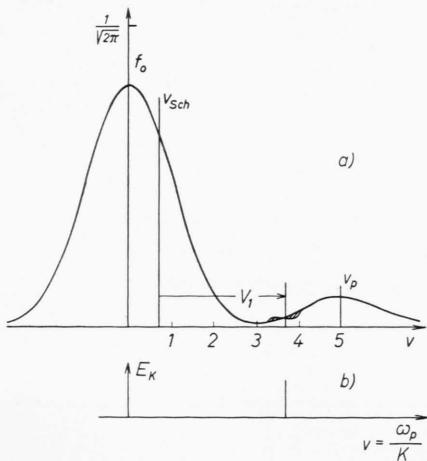


Abb. 1. a) Verflachung einer instabilen Verteilungsfunktion in der Umgebung der Phasengeschwindigkeit. b) Spektrum des elektrischen Feldes. Die Abbildung gibt die Verhältnisse für folgende Parameter wieder:  $K = 0,25$ ;  $A = 0,125$ ;  $v_p = 5$ ;  $v_s = 0,625$ ;  $\sigma = 1$ . Es ist  $v_{sch}$  = Schwerpunktsgeschwindigkeit des Elektronenplasmas,  $V_1$  = Phasengeschwindigkeit der Welle, die dem Phasendiagramm (vgl. Abb. 6) entnommen wurde.

Das Integral in (24) ist mit ziemlich guter Genauigkeit die Zahl der Teilchen, die durch die Diffusion im Geschwindigkeitsraum ihre Geschwindigkeit geändert haben.

Diese Teilchen sind in Abb. 1 a durch die gestrichelte Fläche dargestellt. Die Ableitung von  $f_0(v, t)$  verschwindet in der Umgebung von  $v = \Omega/K$  für  $t \gg 1$ . Die Ausdehnung der schraffierten Fläche ist gegeben durch einige Halbwertsbreiten  $\gamma/K$  von  $D$ . Damit ist das Integral der Größenordnung nach gegeben durch

$$\int_{-\infty}^{\Omega/K} dv [f(v, t) - f(v, 0)] = \alpha \frac{\partial f_0(\Omega/K, 0)}{\partial v} \frac{\gamma}{K}, \quad (25)$$

$\alpha$  ist von der Größenordnung 1.

Mit (25) und (20) wird (24)

$$|E_K|^2_{\text{max}} = \alpha (\gamma^3/K). \quad (26)$$

Bei der Ableitung haben wir stillschweigend nur einen  $K$ -Wert berücksichtigt. (26) ist im Prinzip

<sup>5</sup> J. D. JACKSON, J. Nucl. Energy Part C, 171 (1960).

auch für unsere Rechnungen gültig, denn es gilt annähernd (18), d. h. alle Oberwellen haben die gleiche Phasengeschwindigkeit. Die Oberwellen beschleunigen also nur den betrachteten Prozeß. Allerdings ist die Bedingung  $\gamma \ll 1$  und die weitere Bedingung, daß die Breite der Störung  $\Delta v$  klein sein soll gegen die Halbwertsbreite  $\sigma$  der verschobenen Geschwindigkeitsverteilung [vgl. Gl. (42)],  $\gamma/K \ll \sigma$ , nicht gut erfüllt, und wir dürfen nur eine grobe Übereinstimmung mit (26) erwarten.

In einem wirklichen Plasma entfällt die Beschränkung auf diskrete Wellenzahlen. Um die maximale Energie im elektrischen Feld zu berechnen, muß (24) über alle  $K$  summiert werden

$$\sum_K |E_K(t)|_{\max}^2 = \sum_K \frac{\pi}{2K^2} \left( \Omega_K - K \frac{d\Omega_K}{dK} \right) \cdot \gamma_K \int_{-\infty}^{\Omega_K} dv [f_0(v, t) - f_0(v, 0)]. \quad (27)$$

Da die Fläche in Abb. 2 a größer ist als in Abb. 1 a, ist (27) auch größer als (26) und so dürfte bei einer Instabilität die Feldenergie in einem wirklichen Plasma noch größer sein als in den gerechneten Fällen.

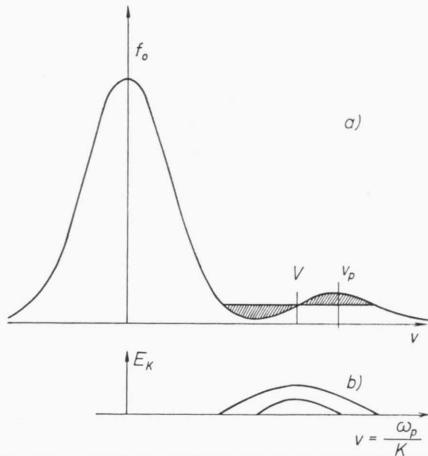


Abb. 2. a) Ausbildung eines Plateaus bei einer instabilen Verteilungsfunktion bei kontinuierlichem  $K$ -Spektrum. b) Spektrum des elektrischen Feldes.

### Zeitlicher Verlauf von $\gamma$

Unter gewissen vereinfachenden Bedingungen läßt sich aus den Gleichungen der quasilinearen Theorie (13) bis (15) eine Differentialgleichung für die Anwachsraten des elektrischen Feldes ableiten. Wir setzen ein stabiles Plasma voraus, etwa, wie es durch

die Anfangsbedingung (41) gegeben ist. Wir führen eine Funktion  $g(v)$  ein, die normiert sein soll,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dv = 1,$$

und nur in der Umgebung von  $v = \Omega/K$  von 0 wesentlich verschieden sei. Die Halbwertsbreite  $\alpha$  von  $g(v)$  sei jedoch größer als die von  $D$ ,  $\gamma/K$ , um im folgenden eine echte Mittelung zu garantieren. Ferner sei  $K \ll 1$ ;  $|\gamma| \ll 1$  und  $\partial f / \partial v$  möge sich in einer Umgebung der Ausdehnung  $\alpha$  von  $v = \Omega/K$  nicht wesentlich ändern.

Differenziert man Gl. (13) nach  $v$ , multipliziert mit  $g(v)$  und integriert über  $v$ , so kann man auf der linken Seite  $(\partial / \partial v) \int$  vor das Integral ziehen, und die Integration durchführen. Auf der rechten Seite kann man zweimal partiell integrieren. Man erhält:

$$\frac{\partial}{\partial v} \int \left( \frac{\Omega}{K}, t \right) = \frac{\partial}{\partial v} f_0 \left( \frac{\Omega}{K}, t \right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} D \frac{\partial^2 g(v)}{\partial v^2} dv. \quad (28)$$

Das Integral ergibt wegen (14), wenn wir nur einen  $K$ -Wert berücksichtigen,

$$\frac{2\pi}{K} |E_K(t)|^2 \left[ \frac{\partial^2 g_+(\omega/K)}{\partial v^2} + \text{c. c.} \right]. \quad (29)$$

Spezialisiert man  $g(v)$  zu

$$\frac{\alpha}{\pi} [(v - \Omega/K)^2 + \alpha^2]^{-1},$$

so wird die eckige Klammer in (29)

$$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{(\alpha + \gamma/K)^3}.$$

Wählt man  $|\gamma/K| \ll \alpha \ll \Omega/K$ , dann wird der Ausdruck von  $\gamma(t)$  unabhängig. Mit Hilfe von (20) und (15) kann man dann Gl. (28) als Gleichung für  $\gamma(t)$  schreiben:

$$\gamma(t) = -2B\gamma \exp \left[ 2 \int_0^t \gamma(t') dt' \right], \quad (30)$$

wobei  $B = (2/\alpha^3) (E_0^2/K)$ .  $B$  charakterisiert im wesentlichen die anfänglich im Periodizitätsintegral vorhandene Feldenergie.

Mit der Veränderlichen

$$\gamma(t) = \int_0^t \gamma(t') dt' \quad \text{und} \quad C = -[1 + \gamma_0/B]$$

erhält man als Lösung

$$\left[ \frac{E(t)}{E(0)} \right]^2 = \exp(2y) = C[(1 + C) \exp(2CBt) - 1]^{-1} \quad \text{für } C \neq 0 \quad (31)$$

$$\text{und } \left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)^2 = [2Bt + 1]^{-1} \quad \text{für } C=0. \quad (32)$$

(31) enthält zwei verschiedene Lösungskurven, je nachdem  $B \leq |\gamma_0|$  ist. Bei  $B < |\gamma_0|$  geht für  $t \rightarrow \infty$  die Feldstärke exponentiell gegen Null, bei  $B > |\gamma_0|$  hingegen geht die Feldstärke gegen den Grenzwert  $\sqrt{1 + \gamma_0/B}$ .

## Numerisches Integrationsverfahren

### Allgemeines

Wie schon in der Einleitung beschrieben, treten immer große Schwierigkeiten auf, wenn man versucht, die Verteilungsfunktion  $f(x, v, t)$  direkt numerisch zu integrieren. Es wurde deshalb der Versuch gemacht, statt  $f(x, v, t)$  deren „charakteristische Funktion“  $F(y, t)$ , d. h. die FOURIER-Transformierte im Orts- und Geschwindigkeitsraum numerisch zu integrieren.

Durch die Transformation

$$F_K(y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_K(v, t) e^{iyv} dv \quad (33)$$

erhält man aus (3) und (4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_K(y, t)}{\partial t} + K \frac{\partial F_K(y, t)}{\partial y} & \quad (34) \\ -y \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{F_q(0, t)}{q} F_{K-q}(y, t) &= 0, \\ iKE_K(t) &= F_K(0, t). \quad (35) \end{aligned}$$

Die Realitätsrelation lautet:

$$F_K^*(y, t) = F_{-K}(-y, t). \quad (36)$$

Zunächst bietet die Wahl irgendeiner Transformierten noch keinen ersichtlichen Vorteil, da die ursprüngliche und die Bildfunktion dieselbe Information enthalten müssen. Sollen beide Funktionen mit gleicher Genauigkeit numerisch dargestellt werden, so folgt daraus, daß in jedem Falle etwa gleich viele Punkte Verwendung finden müssen (vgl. <sup>4</sup>). In unserem Fall ergeben sich jedoch einige bemerkenswerte Unterschiede, wenn man die Integration einmal von  $f$ , das andere Mal von  $F_K$  in der Zeit betrachtet.

1. Die physikalische Grundfrage lautet, wohin die Energie, die anfänglich als Teilchen- oder Feldenergie vorhanden ist, geht und wie sie sich auf die Harmonischen des Feldes aufteilt. Es liegt deshalb nahe, statt  $f$  eine FOURIER-Transformierte von  $f$  in  $x$  zu benutzen.

2. Die FOURIER-Transformation in  $v$  erlaubt es, das elektrische Feld direkt aus  $F_K$  gemäß Gl. (35) zu entnehmen. Gegenüber einer Integration von  $f$  mit  $n$  Punkten in  $x$ -Richtung erspart man sich damit  $n$  Integrationen pro Zeitschritt.

3.  $f$  enthält Terme mit dem Faktor  $e^{iKvt}$ , die dem Betrage nach für  $K v_{th} t \gg 1$  nicht klein werden. Wegen des auf Gl. (8) folgenden Arguments tragen diese Terme aber zu den makroskopischen Größen fast nichts mehr bei. Bei der Interpolation von  $f$  entstehen Fehler von der Größenordnung dieser Terme, sobald  $t \geq 2\pi/K\Delta v$ , da dann die charakteristische Länge dieser Terme kleiner wird als der Abstand  $\Delta v$  zwischen zwei Netzpunkten. Diese Fehler erzeugen entsprechend große Fehler in den makroskopischen Größen. Bei der Berechnung von  $F_K(y, t)$  hingegen werden solche Terme ab  $t = y_{max}/K$  prinzipiell vernachlässigt, da  $F_K(y, t)$  nur in einem endlichen Bereich berechnet werden kann. Es treten hier keine schwerwiegenden Interpolationsfehler auf und der Abschneidefehler ist gering.

4. Das System (34) hat gegenüber (1) die bemerkenswerte Eigenschaft, daß seine Charakteristiken Geraden sind. Dadurch ist es möglich, den zweiten Term von (24) exakt zu integrieren, wenn man z. B.  $\Delta y = K\Delta t$  wählt. Etwas Entsprechendes ist für (1) nicht möglich.

Die Erhaltungssätze, durch die  $F_K(y, t)$  ausgedrückt, erhält man, wenn man (34) 0-, 1-, 2-mal nach  $y$  differenziert und  $K=0$  setzt. Man erhält die Konstanz der Teilchenzahl des Impulses und der Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_0(0, t) = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} F_0(0, t) = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_0(0, t) + \sum_{q=0}^{\infty} |E_q(t)|^2 \right] = 0. \quad (39)$$

Für ein System mit endlich vielen Harmonischen wird die Summe in (39) bei  $N$  abgebrochen. Die Gültigkeit des Energiesatzes sagt dann noch nichts darüber aus, wie gut die VLASOV-Gleichung durch das System mit  $N$  Harmonischen approximiert wird.

### Einfluß von Vernachlässigungen

Die Rechnungen mußten dem beschränkten Speicherplatz der verfügbaren elektronischen Rechen-

maschine<sup>6</sup> angepaßt werden. Deshalb wurde nur mit der Grundwelle und einer Oberwelle gerechnet. Die VLASOV-Gleichung ist dann gut approximiert, solange die Amplitude der Oberwelle klein ist im Vergleich zur Grundwelle. Zum Beweise sei angenommen, daß alle Harmonischen bis  $n=N$  berechnet werden und daß anfangs größtenordnungsmäßig gelte  $F_n \sim \varepsilon^n F_0$ , wobei  $n > 0$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Der Wechselwirkungsterm

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{w}{\nu} F_\nu(0, t) F_{n-\nu}(w, t)$$

von (34) hat dann Glieder der Größenordnung  $\varepsilon^{|n-\nu|+|\nu|}$ , d. h.  $\varepsilon^n$  für  $n \geq \nu > 0$ ,  $\varepsilon^{n+2|\nu|}$  für  $\nu < 0$ ,  $\varepsilon^{2\nu-n}$  für  $\nu > n$ . Um die relative Größe in bezug

auf  $F_n(w, t)$  zu erhalten, müssen wir mit  $\varepsilon^{-n}$  multiplizieren. Der größte Fehler, der gemacht wird, stammt vom ersten vernachlässigten Glied, für  $\nu = N+1$  und ist von der Ordnung  $\varepsilon^{2(N+1-n)}$ . Die Größe der relativen Fehler nimmt demnach mit der Ordnung der Harmonischen zu und beträgt für  $n=N$ :  $O(\varepsilon^2)$ , ist also in der Tat gering. Aus dem Ergebnis der Rechnung kann man entnehmen, ob die Voraussetzungen noch gültig sind. Wird z. B. im Verlauf der Rechnung einmal  $F_N$  vergleichbar  $F_{N-1}$ , so sind die Voraussetzungen verletzt und die Lösung des „amputierten Systems“ approximiert nicht mehr notwendiger Weise die VLASOV-Gleichung.

Die formale Lösung von (34) lautet

$$F_n(w, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t (w - n s) \frac{F_\nu(0, t-s)}{\nu} F_{n-\nu}(w - n s, t-s) + F_n(w - n, t, 0) . \quad (40)$$

Das Integral wird längs den entsprechenden Charakteristiken berechnet. Da diese aus dem bekannten Bereich der Werte herauslaufen, beschafft man sich durch Extrapolation die Werte für  $(t + \Delta t)$  und erhält in einem zweiten Schritt durch Integration längs der Charakteristik die verbesserten Werte. Im vorliegenden Falle wurden, wegen des kleinen Maschinen-speichers, nur die Werte  $F_n(w, t)$  für einen  $t$ -Wert aufgehoben. Die erste Näherung des Integrals bestand darin, längst  $t = \text{const}$  zu integrieren. Durch die Iteration wird der Abschneidefehler dann auf  $O[(\Delta t)^3]$  herabgedrückt. Um einen nicht zu großen Zeitschritt zu erhalten, wurde  $\Delta t = \frac{1}{2} \Delta w$  gewählt. Dadurch geht für die Grundwelle die exakte Berechnung des letzten Terms in (40) verloren, da die Charakteristik zwischen 2 Punkten bei  $t = t_0$  verläuft. Jedoch kann man zeigen (vgl. <sup>4</sup>), daß dieser Fehler vernachlässigbar klein wird.

#### Anfangswerte und numerische Ergebnisse

Für stabile Plasmen wurde die Anfangsverteilung

$$f(x, v, 0) = (2\pi)^{-1/2} (1 + A \cos Kx) \exp(-\frac{1}{2} v^2), \quad A < 1 \quad (41)$$

verwendet. Zur Erzeugung von Zweistrominstabilitä-

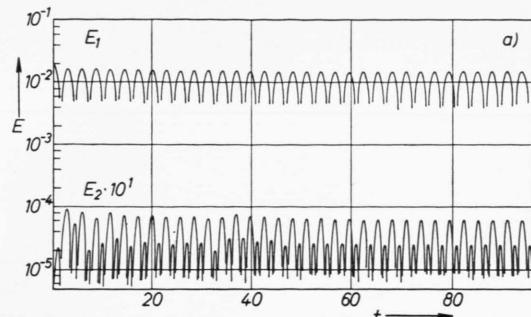
ten dienten zwei verschobene MAXWELL-Verteilungen

$$f(x, v, 0) = (1 - A) (2\pi)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} (v + v_s)^2] + A (2\pi)^{-1/2} (1 + \varepsilon \cos Kx) \cdot \exp[-\frac{1}{2} \sigma^{-1} (v + v_s - v_p)^2], \quad \varepsilon \ll 1 . \quad (42)$$

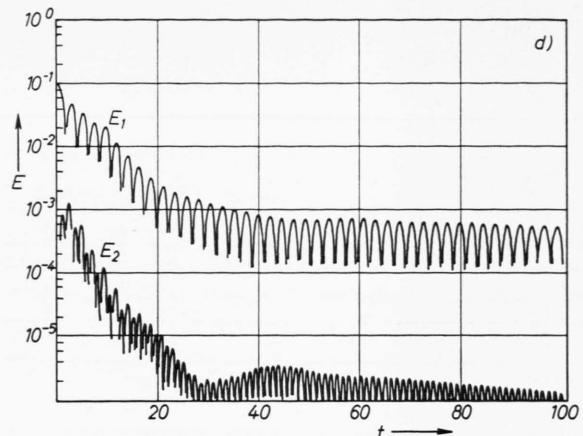
$f$  ist dann normiert und die in (42) enthaltenen Parameter erlauben es, eine Vielzahl von Anfangsbedingungen zu untersuchen.

Eine Auswahl aus den numerischen Ergebnissen zeigen die folgenden Abbildungen. In Abb. 3 a – e sind die Amplituden der Grundwelle und der Harmonischen in logarithmischem Maßstab gegen die Zeit aufgetragen. Die Anfangsverteilung ist (41). Das elektrische Feld für  $t = 0$  ist  $E(0) = A/K$ . Wegen der Symmetrie von (41) schwingt das Plasma als stehende Welle. Aus der Abnahme der Amplitude entnimmt man die Dämpfung. Für nicht zu große und nicht zu kleine  $t$  zeigen Abb. 3 a – e exponentielle LANDAU-Dämpfung. In Abb. 3 a ( $K = \frac{1}{4}$ ;  $A = 10^{-2}$ ) ist die Dämpfung so gering, daß die Abnahme der elektrischen Energie größtenordnungsmäßig vergleichbar wird mit der Zunahme der Gesamtenergie, die durch das numerische Verfahren bedingt wird. Für größere Zeiten nimmt die Dämpfung ab, so daß ab  $t = 45$  die Grundwelle und ab  $t = 55$  die Harmonische stationär erscheint. Jedoch lassen sich bei so kleiner Dämpfung keine eindeutigen Schlüsse ziehen. Gehen wir aber zu größeren  $K$  über, so ist der Einfluß der Verfahrensfehler auf die Energiebilanz

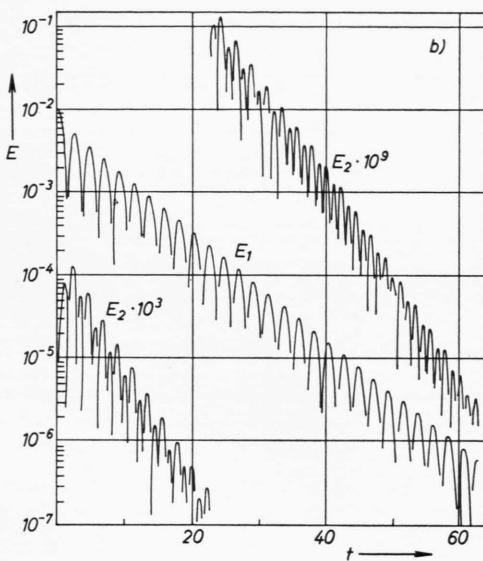
<sup>6</sup> Die Rechnungen wurden alle, wie in I, auf der „G 3“ des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik, München, ausgeführt. Der Speicherplatz betrug insgesamt ca. 4000 Worte.



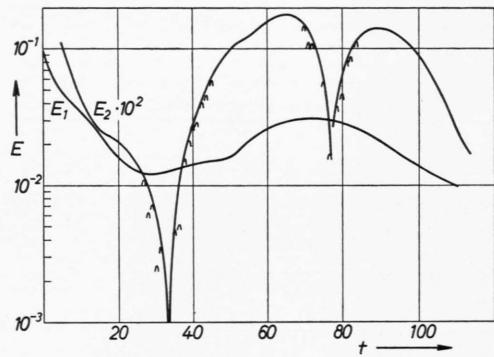
3 a



3 d



3 b

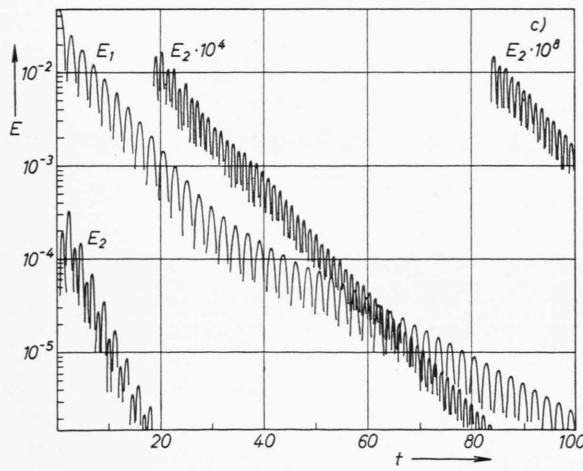


3 e

Abb. 3. Zeitlicher Verlauf der elektrischen Feldstärke einer stehenden Welle mit Wellenzahl und Amplitude als Parameter.  $E_1$  und  $E_2$  sind die FOURIER-Komponenten der Grund- und Oberwelle.

Abb. 3	a	b	c	d	e
$K =$	0,25	0,5	0,5	0,5	0,375
$A =$	0,01	0,01	0,05	0,1	0,05

gering. In Abb. 3 b ist die Abweichung von der exponentiellen Dämpfung nicht festzustellen, allerdings ist hier  $E_0$  kleiner als in Abb. 3 a. Um nun den Einfluß der Nichtlinearität auf die LANDAU-Dämpfung zu studieren, halten wir  $K$  fest und vergrößern  $A$ . Wir erhalten dann (Abb. 3 c,  $K = \frac{1}{2}$ ;  $A = 0,05$ ) zunächst LANDAU-Dämpfung, im weiteren Verlauf nimmt  $\gamma$  dann merklich ab. Jedoch wird bis  $t = 100$  kein stationärer Zustand erreicht, wobei die Dämpfung ab  $t = 40$  praktisch konstant ist. In Abb. 3 d ist  $A = 0,1$  ( $K = \frac{1}{2}$ ). Nach anfänglicher exponentieller Dämpfung nimmt  $\gamma$  ab und bei  $t = 60$  ist ein fast stationärer Zustand erreicht. Auch die Harmonische zeigt einen fast stationären Zustand ab  $t = 60$ .



3 c

Die geschilderten Erscheinungen werden gut beschrieben durch die zwei verschiedenen Lösungskurven von Gl. (31). Die Abnahme von  $|\gamma|$  wird um so schneller vor sich gehen, je größer die Anfangsfeldstärke ist, da  $D \sim |E_K(t)|^2$ . Ist diese so groß, daß die Verteilungsfunktion in der Umgebung der Phasengeschwindigkeit ganz abgeplattet wird, so tritt ein stationärer Zustand ein, wobei die Feldstärke einen bestimmten endlichen Wert annimmt. Ist andererseits die Anfangsfeldstärke kleiner als ein bestimmter kritischer Wert, so wird die Diffusionskonstante so klein, daß die Verteilungsfunktion nicht mehr ganz abgeflacht wird, wir erhalten eine konstante Dämpfung der Feldstärke.

Außer diesem Verlauf der Feldstärke tritt noch ein ganz anderer Lösungstyp auf, wie er in Abb. 3 e abgebildet ist. Es ist hier nur die Enveloppe der stehenden Welle für  $K = 0,375$ ;  $A = 0,05$  aufgezeichnet.  $E_1$  zeigt zunächst LANDAU-Dämpfung und Abnehmen von  $|\gamma|$ , dann nimmt jedoch  $E_1$  wieder zu bis zu einem Maximum bei  $t = 70$ , dann wieder ab. Dies entspricht einer Schwingungsdauer von  $\tau \approx 80$ . Einen entsprechenden Verlauf zeigt  $E_2$  mit der doppelten Frequenz und sehr ausgeprägtem Minimum. Die Erklärung dieser „Schwebung“ wird durch die Überlegungen über den Einfluß der Anfangsbedingungen gegeben. In der Tat, zählt man zwischen den beiden Minima von  $E_1$  bei  $t = 28$  und  $t = 110$  die Maxima von  $E_1$  und  $E_2$  aus, so ergibt sich genau Gl. (19).

Als Illustration für einen charakteristischen Verlauf von  $F_1(w, t)$  ist in Abb. 4 diese Funktion für  $K = \frac{1}{2}$ ;  $A = 0,1$  und  $t = 70$  gezeichnet. Man beachte, daß scharfe Spitzen fehlen und sich die Kurve zur numerischen Berechnung dadurch gut eignet.

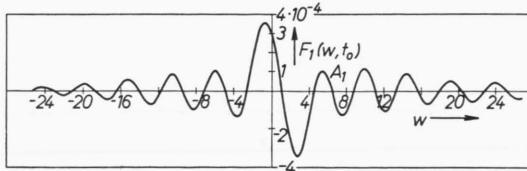
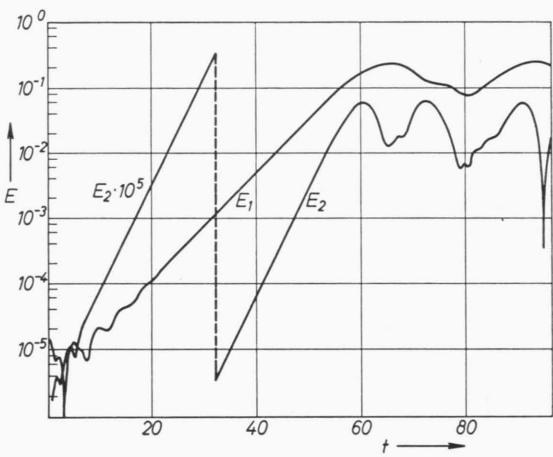


Abb. 4. Querschnitt durch  $F_1(w, t)$  für den Fall von Abb. 3 d für  $t_0 = 70$ .

Die Berechnung von Zweistrominstabilitäten ist deshalb so interessant, da neben den makroskopischen Instabilitäten die Mikroinstabilitäten eines der ernstesten Hindernisse bei der kontrollierten thermonuklearen Fusion darstellen. Es ist deshalb wichtig zu wissen, wie groß das elektrische Feld durch nicht-lineare Effekte überhaupt werden kann.

Als Anfangsbedingung wurde (42) verwendet und die Parameter  $A$ ,  $K$ ,  $\sigma$ ,  $v_p$  so gewählt, daß die Verteilung instabil im Sinne der linearen Theorie war. Bei dem zeitlichen Verlauf der elektrischen Feldstärke, die für 2 Parametersätze ( $K = \frac{1}{4}$ ;  $A = \frac{1}{2}$ ;  $v_p = 4,2$ ;  $v_s = 2,1$ ;  $\sigma = 1$  und  $K = \frac{1}{4}$ ;  $A = \frac{1}{8}$ ;  $v_p = 5$ ;  $v_s = 0,625$ ;  $\sigma = 1$ ) in Abb. 5 a, b dargestellt sind, kann man deutlich 3 Bereiche unterscheiden: Im ersten führt die Amplitude mehr oder weniger regelmäßige Schwingungen aus, die von den verschiedenen Lösungen der Dispersionsgleichung herrühren. Im zweiten Bereich wächst die Amplitude exponentiell an. Auch die Harmonische wächst exponentiell, und zwar etwa mit der doppelten Wachstumsrate



5 a

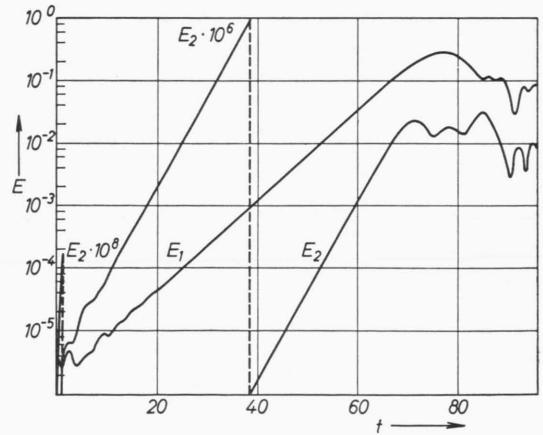


Abb. 5. Zeitlicher Verlauf der elektrischen Feldstärken bei instabilen Anfangsverteilungen

- a)  $K = 0,25$ ;  $A = 0,5$ ;  $v_p = 4,2$ ;  $\sigma = 1$ ;  
 b)  $K = 0,25$ ;  $A = 0,125$ ;  $v_p = 5$ ;  $\sigma = 1$ .

als die Grundwelle. Dies ist in Übereinstimmung mit der Gl. (18). In diesem Bereich ist stets das Verhältnis der Amplituden  $A_2/A_1 \ll 1$  so, daß unsere Rechnung mit nur einer Oberwelle die Lösung der VLASOV-Gleichung gut wiedergibt.

Im dritten Bereich läßt das Wachstum der Amplituden aus Gründen der Energieerhaltung stark nach und sie erreichen ein Maximum. Das Maximum von  $E_2$  wird stets etwas eher erreicht als das von  $E_1$ .  $E_1$  und  $E_2$  führen nun wieder Schwankungen aus, die etwa im Bereich einer Zehnerpotenz liegen und deren Schwingungsdauer  $\tau \approx 20 - 40$  beträgt. Auch wenn man das Verhalten der Lösung noch lange weiterverfolgt, bleibt die Amplitude und damit die elektrische Feldenergie auf dem erreichten hohen Niveau. Jedoch ist jetzt die Bedingung  $E_1 \gg E_2$  nicht mehr erfüllt und unsere numerischen Lösungen brauchen nicht mehr die Lösung der vollständigen VLASOV-Gleichung mit allen Oberwellen darzustellen. Es ist plausibel, anzunehmen, daß sich ein System wie unseres mit 3 Freiheitsgraden anders verhält als ein System mit vielen Freiheitsgraden (bzw. Oberwellen).

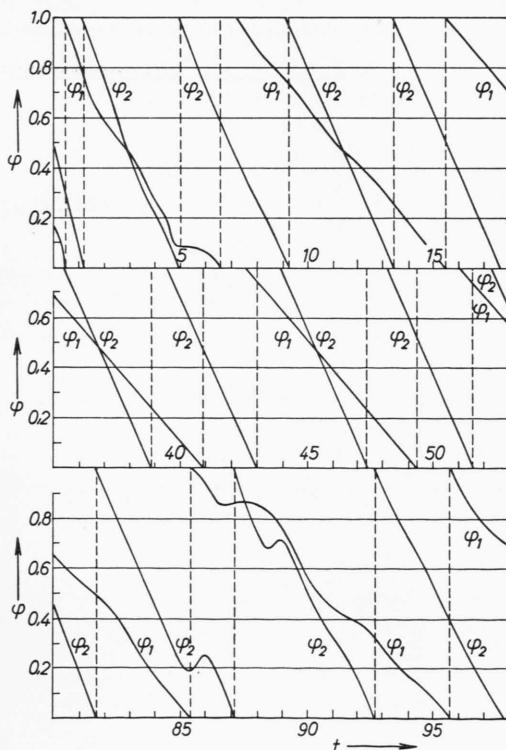


Abb. 6. Phasendiagramm der instabilen Verteilung von Abb. 5 b. Um Platz zu sparen, werden nur Ausschnitte aus den drei deutlich unterschiedenen Bereichen gezeigt.

Auch in den Phasendiagrammen von Abb. 6 lassen sich die erwähnten 3 Bereiche unschwer wiedererkennen. Der mittlere Bereich ist dadurch ausgezeichnet, daß die Phasengeschwindigkeit konstant ist, während sie in den übrigen Bereichen, besonders im dritten, schwankt.

Wir haben:

$$E(x, t) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{K} [F_K(0, t) e^{i K x} - F_{-K}(0, t) e^{-i K x}].$$

Spalten wir  $F_K$  nach Real- und Imaginärteil auf:

$$\text{Re} \left\{ F_K(0, t) \right\} = A_K \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} 2 \pi \varphi_K(t),$$

so erhalten wir:

$$E(x, t) = 2 \sum_{K_0}^{\infty} \frac{A_K}{K} \cos[K x + 2 \pi \varphi_K(t)];$$

die Phasengeschwindigkeit ergibt sich zu

$$V_K = - (2 \pi / K) \dot{\varphi}_K;$$

und  $\varphi_K$  ist gegeben durch

$$\varphi_K(t) = \arctan \frac{\text{Im } F_K(0, t)}{\text{Re } F_K(0, t)}.$$

Aus Abb. 6 entnimmt man  $V = 3,16$  und  $\varphi_2 \approx 2 \varphi_1$  so, daß die Phasengeschwindigkeiten der verschiedenen Harmonischen gleich groß sind. Auch dies folgt aus Gl. (18).

Um die Frage nach der maximalen Energie im elektrischen Feld zu prüfen, haben wir gemäß Gl. (26) in Abb. 7  $E_{1 \max}$  gegen  $\gamma^3 / K$  aufgetragen. Da die Bedingung  $K \ll 1$  bei weitem nicht erfüllt ist, kann man nicht erwarten, daß die Punkte genau auf

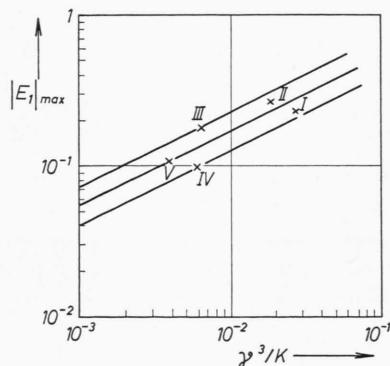


Abb. 7. Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Feldstärke von den Parametern der Anfangsverteilung eines instabilen Plasmas.  $E_{\max}$  ist gegen den Parameter  $\gamma^3 / K$  aufgetragen.

einer Geraden liegen. Jedoch liegen sie alle in einem Bereich des Diagramms und es ergibt sich  $\alpha \approx 3$ . Daß  $\alpha$  von der Größenordnung 1 sein werde, ist aus der Ableitung heraus auch zu erwarten. Gl. (26) gibt die Größenordnung der erreichten Felder richtig wieder.

### Genauigkeit der Rechnung

Als Hauptkriterium für die Genauigkeit der numerischen Rechnungen diente der Energiesatz in der Form (39).  $\partial^2 F_0(0, t) / \partial y^2$  wurde mit Hilfe eines Interpolationspolynoms 4. Ordnung bestimmt. Um die Genauigkeit der Rechnung beurteilen zu können, ist in Abb. 8 die Gesamtenergie  $E_{\text{tot}}$  abzüglich einer Konstanten und im selben Maßstab die elektrische Gesamtenergie  $W_{\text{el}}$  für den Fall der Abb. 3 e aufgetragen. Man sieht, daß die Variation der Gesamtenergie verglichen mit der Änderung der Feldenergie sehr gering ist.

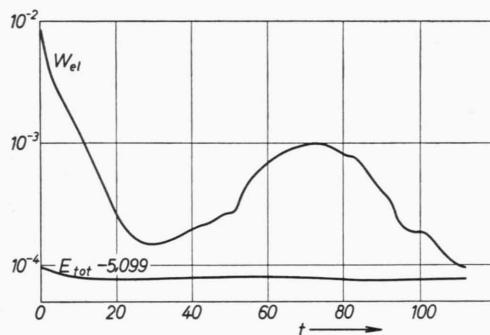


Abb. 8. Vergleich des Ganges der Gesamtenergie  $E_{\text{tot}}$  mit der Energie des elektrischen Feldes  $W_{\text{el}}$  für den Fall der Abb. 3 e.  $W_{\text{el}}$  ist jeweils im Maximum der Welle genommen. Die Gesamtenergie ist wegen numerischer Fehler nicht ganz konstant, sondern steigt leicht an.

Eine Übersicht der Genauigkeit in Abhängigkeit vom Zeitschritt für die Anfangsverteilung der Abb. 5 a gibt Abb. 9. Die instabile Verteilung wurde für drei verschiedene Zeitschritte  $\Delta t = 0,1; 0,2; 0,4$  bei gleichem Bereich in  $w$  gerechnet. Es ergaben sich die Kurven a, b, c für  $(E_{\text{tot}} - C)$  und a', b', c' für  $W_{\text{el}}$ . Die Kurven für  $(E_{\text{tot}} - C)$  unterscheiden sich im wesentlichen nur durch einen Maßstabsfaktor der Ordinate. Für  $t = 120$  wird das Verhältnis

$$\left| \frac{E_{\text{tot}}(0) - E_{\text{tot}}(t)}{W_{\text{el}}(0) - W(t)} \right| < 1\%.$$

Dies besagt, daß die elektrische Feldenergie für  $\Delta t = 0,1$  durch die Rechnung mit weniger als 1% Fehler wiedergegeben wird.

Eine weitere Fehlerquelle ist die endliche Ausdehnung des Intervalls in  $w$ . Wir verglichen deshalb zwei Läufe für eine instabile Verteilung, deren Parameter alle übereinstimmten mit Ausnahme des  $w$ -Intervalls. Es war einmal  $w_{\text{max}} = 26,8$ , dem 134 Punkte für das halbe Intervall und  $\Delta t = 0,1$  entspricht, und das andere Mal  $w_{\text{max}} = 13,4$  mit der halben Punktezahl. Auf Grund der Neigung der Charakteristiken in der  $w$ -Ebene könnte sich ein Unterschied für  $E_1$  für  $t \geq 13,4$  und für  $E_2$  für  $t \geq 7,6$  herausstellen.

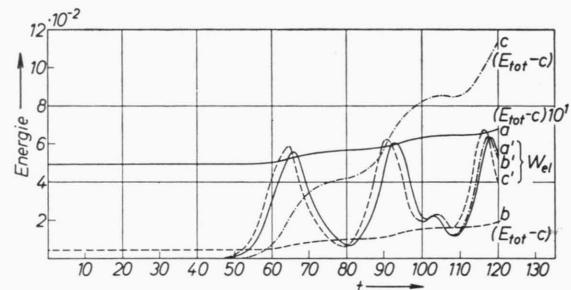


Abb. 9. Einfluß eines verschiedenen großen Zeitschritts auf die Genauigkeit der Rechnung. Eine instabile Verteilung wurde mit den Zeitschritten  $\Delta t = 0,1; 0,2; 0,4$  gerechnet. Die Kurven a, b, c stellen den diesbezüglichen Gang der Gesamtenergie dar, die Kurven a', b', c' den Verlauf der elektrischen Gesamtenergie  $W_{\text{el}}$ . Um die Gesamtenergie im Diagramm zeichnen zu können, wurde die Konstante  $C = 2,70$  abgezogen.

Die Feldstärken beider Läufe unterschieden sich jedoch (mit vier ausgedruckten Stellen) bis  $t = 60$  überhaupt nicht. Für  $t = 120$  betrug dann z. B.  $\Delta E_1/E_1 = 0,88\%$  und  $\Delta E_2/E_2 = 3,6\%$ . Aus diesen Zahlen darf man schließen, daß die Vernachlässigung des Bereichs  $|w| > 26,8$  einen Fehler  $< 1\%$  bedingt. Entsprechende Ergebnisse lieferte die Untersuchung anderer Parametersätze.

Ein weiterer Test für die Genauigkeit ist die GALILEI-Invarianz der Gleichungen. Führt man in den Anfangsbedingungen (42) mit  $v_s = 0$  eine GALILEI-Transformation durch Wahl eines  $v_s \neq 0$  durch, so transformieren sich die charakteristischen Funktionen  $F_K(w, 0)$  in  $\exp\{i v_s K w\} F_K(w, 0)$ . Die Maschine „sieht“ ganz verschiedene Anfangsbedingungen. Der zeitliche Verlauf der Amplituden soll aber in beiden Fällen derselbe sein. Zwei solche Fälle sind in Abb. 10 gezeigt. Die gemeinsamen Parameter sind  $K = 0,25; A = 0,01; v_p = 4,3; \sigma = 2$ . Für die durchgezogene Kurve ist  $v_s = 2$ , für die gestrichelte ist  $v_s = 0$ . Die Kurven decken sich anfänglich, mit der Zeit entsteht aber eine geringe Phasendifferenz ( $\Delta t \approx 0,3$  bei  $t = 60$ ). Ebenfalls zu dieser

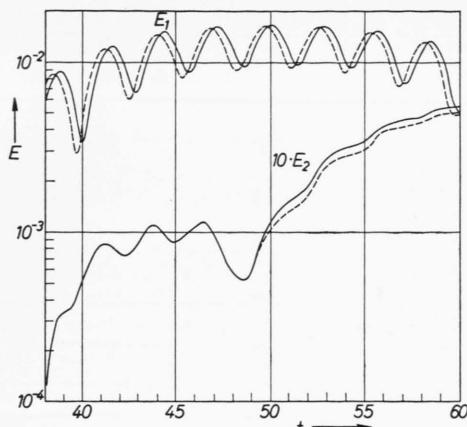


Abb. 10. Einfluß einer GALILEI-Transformation auf die Form der Lösung. Es wurden die gleichen Anfangsbedingungen, jedoch mit verschiedenen  $v_s$  gerechnet. Für  $t \leq 30$  ist der Verlauf der Amplituden praktisch derselbe. Für spätere Zeiten entsteht eine in der Abbildung gezeigte Phasendifferenz. Der Fall  $v_s=2$  ist ausgezogen,  $v_s=0$  ist gestrichelt gezeichnet.

Zeit ist der relative Unterschied der Feldstärken ca. 8%, was nur durch die Phasenverschiebung hervorgerufen wird. Ein Blick auf die Anfangsbedingungen lehrt, daß  $F_0(w, 0)$  für  $v_s=2$  im Mittel stärker gekrümmmt ist als für  $v_s=0$ . Es ist deshalb anzunehmen, daß im ersten Fall bei der Berechnung des dritten Terms in (34) für  $K \neq 0$  etwas größere Fehler entstehen als im letzteren Fall. So erscheint es plausibel, daß  $\Delta E_{\text{tot}}$  für  $v_s=2$  etwas größer ausfällt, was auch tatsächlich der Fall ist.

Herrn Prof. Dr. A. SCHLÜTER schulde ich Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und für fördernd-kritische Diskussionen. Herrn Dr. D. PFIRSCH danke ich für zahlreiche klärende Gespräche. — Frau BANIK bin ich für das Anfertigen der zahlreichen Zeichnungen, Fräulein STEIGER für das Schreiben des Manuskriptes sehr verbunden.

## Stationäre Strömungen chemisch reagierender Gase und Plasmen\*

Von W. GEIGER \*\*

Aus dem Institut für Hochtemperaturforschung an der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforsch. 18 a, 1315—1331 [1963]; eingegangen am 27. Februar 1963)

Zweck der vorgelegten Untersuchungen ist es, die Besonderheiten zu diskutieren, die bei der Strömung reagierender Gase und Plasmen auftreten. Dabei interessiert besonders der Einfluß chemischer Reaktionen auf die Strömungsstabilität und auf Übergänge bei Verdichtungsstößen. Die stationäre Strömung reagierender Gase und Plasmen hat charakteristische Eigenschaften, welche sich bei teilionisiertem bzw. teildissoziiertem Wasserstoff in besonders einfacher Weise aufzeigen lassen. Zur Beschreibung der Erscheinungen werden zwei verschiedene Mach-Zahlen eingeführt, die von den Schallgeschwindigkeiten für hohe und tiefe Frequenzen abgeleitet sind und wechselweise verwendet werden. Durch die beiden Schallgeschwindigkeiten und eine weitere charakteristische Geschwindigkeit wird der gesamte Mach-Zahlbereich in einzelne Gebiete unterteilt, die sich besonders durch das Verhalten der Strömung gegenüber kleinen Störungen unterscheiden.

Die theoretische Untersuchung hat gezeigt, daß im Bereich mittlerer Mach-Zahlen der Stoßübergang aufgeteilt werden kann in einen Hauptstoß, bei welchem der Einfluß der Reaktionen im wesentlichen vernachlässigbar ist, und eine Relaxationszone hinter dem Hauptstoß, was auch experimentell bekannt ist. Im Bereich kleiner Mach-Zahlen, nach unten begrenzt durch die Mach-Zahl 1 für relaxationsfreie Gleichgewichtseinstellung, nach oben begrenzt durch die Mach-Zahl 1 bei eingefrorenem Gleichgewicht, ist als Besonderheit ein Stoßübergang möglich, der im wesentlichen allein durch den Dissipationsmechanismus der chemischen Reaktion bestimmt wird. Bei sehr großen Mach-Zahlen können Hauptstoß und Relaxationsgebiet nicht mehr als getrennte Zonen eingeführt werden. Hier laufen die dissipativen Mechanismen gleichzeitig ab und die Gleichgewichtseinstellung der Reaktion erfolgt außerordentlich schnell. Typische Fälle werden numerisch durchgerechnet.

Die Stabilität von schallnaher und Überschallströmung wird untersucht. Der Beitrag der Reaktion zur Entropieproduktion im Stoßübergang wird abgeleitet und ihre Auswirkung auf die Dicke des Verdichtungsstoßes diskutiert.

In aerodynamischen Problemen kann bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten die Reibung zwischen Gas und umströmtem Körper zu so hohen Tempera-

turen führen, daß chemische Reaktionen im Gas stattfinden, die den Strömungsverlauf in unübersichtlicher Weise beeinflussen. Ähnliche Erscheinungen tre-

\* Als Dissertation genehmigt von der Technischen Hochschule Stuttgart.

\*\* Wissenschaftl. Assistent am Recheninstitut der Technischen Hochschule Stuttgart.